

## 格林函数法求解含移动介质轴向导热的 稳态温度场

赵国昌<sup>1</sup>, 杜霞<sup>1</sup>, 宋丽萍<sup>2</sup>, 李静<sup>1</sup>

(1. 沈阳航空航天大学 航空航天工程学部(院), 沈阳 110136;

2. 沈阳航空航天大学 高等教育研究所, 沈阳 110136)

**摘 要:** 用格林函数法求解了考虑移动介质轴向导热影响的稳态温度场, 推导了第 1 类和第 2 类非齐次边界条件下求解稳态温度场的数学表达式, 利用特征值和特征函数获得了格林函数解, 证实格林函数法可以解决非齐次边界条件下的稳态传热问题. 以平行板间和圆管内均匀速度移动介质的稳态传热为例, 获得了在半无限长壁面和有限长壁面有均匀热流密度两种情况下所对应的温度场的无量纲解析解, 分析了移动介质轴向导热与  $Pe$  和  $x/H$  之间的关系. 结果表明: 在所分析的两种热流密度边界条件下,  $Pe$  越大无量纲温度越小; 在半无限大区域有均匀热流密度条件下, 无壁面热流密度区域温度变化越剧烈, 有均匀壁面热流密度的区域无量纲温度随  $x/H$  的变化几乎不受  $Pe$  大小的影响; 在有限区域有均匀热流密度条件下, 与半无限大区域均匀加热的情况有显著差异, 在全计算域内温度变化越剧烈.

**关 键 词:** 格林函数; 移动介质; 轴向导热; 非齐次边界条件;  $Pe$ ; 温度场

**中图分类号:** V231.1; TG156.99

**文献标志码:** A

## Solving steady-state temperature fields with axial conduction in moving media using Green's function method

ZHAO Guo-chang<sup>1</sup>, DU Xia<sup>1</sup>,  
SONG Li-ping<sup>2</sup>, LI Jing<sup>1</sup>

(1. College of Aerospace Engineering,

Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China;

2. Institute of Higher Education,

Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

**Abstract:** The Green's function method for solving axial conduction effects of moving media on its steady-state temperature field was introduced. The mathematical expression describing steady-state temperature fields under first and second classes of non-homogeneous boundary conditions was derived using eigenvalues and eigenvalue functions to obtain the Green's function solutions. It was confirmed that the steady-state heat transfer problems can be solved under the non-homogeneous boundary conditions by employing Green's function method. The heat transfer of the moving media between two parallel plates and within a circular tube was calculated under uniform heat flux conditions for semi-infinite and finite lengths and the analytical dimensionless temperature solutions were obtained. The relationship between the axial conduction effects of moving media and the  $Pe$  and  $x/H$  was also analyzed. The results show that: the larger  $Pe$  means the smaller dimensionless temperature for both cases of uniform heat flux conditions of semi-infinite and limited lengths; more intense

temperature changes in the absence of surface heat flux and more mild temperature changes for the case of uniform wall heat flux of semi-infinite length are observed; in the case of limited length under uniform heat flux condition, significant differences compared with the case of uniform heating in semi-infinite region and more dramatic temperature changes in the whole computational domain are observed.

**Key words:** Green's function; moving media; axial conduction; non-homogeneous boundary conditions;  $Pe$ ; temperature field

## 符号表

|               |                                              |             |                                                        |
|---------------|----------------------------------------------|-------------|--------------------------------------------------------|
| $A$           | 横截面积( $\text{m}^2$ )                         | $q_w$       | 壁面热流密度( $\text{W}/\text{m}^2$ )                        |
| $u$           | 速度( $\text{m}/\text{s}$ )                    | $h$         | 表面传热系数( $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ )       |
| $B_m$         | 解析式中的常量                                      | $\bar{r}$   | $\bar{r} = r/r_0$                                      |
| $U$           | 恒定速度( $\text{m}/\text{s}$ )                  | $a$         | 热扩散率( $\text{m}^2/\text{s}$ )                          |
| $C$           | 热容( $\text{J}/\text{K}$ )                    | $Pe$        | 贝克来数 $Pe = CUL_c/\kappa$                               |
| $W$           | 平行板管道宽度( $\text{m}$ )                        | $\Gamma$    | 计算域的边界                                                 |
| $f_m$         | 特征函数                                         | $q$         | 热流密度( $\text{W}/\text{m}^2$ )                          |
| $\mathbf{r}$  | 位置矢量                                         | $\lambda_m$ | 特征值( $\text{m}^{-1}$ )                                 |
| $g_m$         | 特征函数                                         | $N_m$       | 标准模                                                    |
| $\mathbf{r}'$ | 点热源矢量                                        | $\omega^2$  | 式(1)中的常量                                               |
| $G$           | 格林函数                                         | $N$         | 项数                                                     |
| $\bar{x}$     | $\bar{x} = (x/L_c)/Pe$                       | $\theta$    | 无量纲温度                                                  |
| $H$           | 介质的半厚度( $\text{m}$ )                         | $K$         | $ \lambda_m / \bar{x} $ 的最大值                           |
| $\bar{y}$     | $\bar{y} = y/L_c$                            | $\beta_m$   | 当 $\lambda_m < 0$ 时的 $ \lambda_m $ ( $\text{m}^{-1}$ ) |
| $L_c$         | 特征长度( $\text{m}$ )                           | $T_i$       | 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 壁温( $\text{K}$ )           |
| $T$           | 温度( $\text{K}$ )                             | $\gamma_m$  | $y$ 方向上的特征值( $\text{m}^{-1}$ )                         |
| $\kappa$      | 导热系数( $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ) | $m, n$      | 下标, 特征值序号                                              |
| $T_w$         | 壁温( $\text{K}$ )                             |             |                                                        |

热传导微分方程建立了温度场和热源之间的关系, 当热源可以被分解成很多点热源时, 知道点热源产生的温度场, 利用叠加原理则可求出同样边界条件下任意热源的温度场, 这种求解热传导方程的方法叫格林函数法, 而点热源产生的温度场叫格林函数. 文献[1-2]描述了用格林函数法求解一般热传导问题的过程. 近年来一些学者用格林函数法对通道中流体的热传导进行了详细研究<sup>[3-7]</sup>, 对恒壁温或恒热流密度边界条件下圆管道中层流流体的轴向导热进行了求解<sup>[3]</sup>; 研究了边界条件为阶跃壁温和阶跃壁面热流密度的半无限大移动介质的轴向热传导<sup>[4-5,7]</sup>; 分析了三角形微管中流体的轴向导热<sup>[6]</sup>; 获得了阶跃壁温边界条件下多孔材料微管中考虑流体轴向导热的温度场<sup>[7]</sup>.

也有一些研究者使用其他方法对通道中考虑流体轴向导热的稳态热传导进行了研究<sup>[8-19]</sup>, 如用分离变量法求解恒壁温平行板和圆管内传热问

题<sup>[8]</sup>; 运用矩阵正交和对角化的方法求解特征值分析半无限大圆管恒壁温边界条件下局部努塞尔数的变化<sup>[9]</sup>; 在阶跃壁温条件下用扩展 Graetz 法研究轴向导热对平行板和圆管入口区域的影响<sup>[10-11]</sup>; 考虑液体黏性耗散、轴向导热和电加热, 运用半解析法对阶跃壁温条件下的平行板微管道入口区域温度和局部努塞尔数分布进行求解<sup>[12]</sup>; 使用加权残值法计算矩形通道的轴向热传导<sup>[13]</sup>; 运用最小二乘法求得特征参数, 研究圆管内变热流密度条件下的层流流体的热传导<sup>[14]</sup>; 应用积分变换法获得壁面恒热流密度边界条件下圆管内流体轴向导热的 Graetz 问题的近似解<sup>[15]</sup>; 运用积分变换法分别求得了平行板管道和圆管道恒壁温边界条件下考虑轴向热传导的局部努塞尔数<sup>[16-17]</sup>; 求解了多孔材料圆管恒热流密度边界条件下考虑轴向热传导的局部努塞尔数和温度场<sup>[18]</sup>; 使用扩展 Graetz 法得到了多孔材料平行板微管道和圆形微管道在变壁温边界条件下的局部努塞尔数和

温度场的解析解<sup>[19]</sup>.

对比分析文献中不同求解方法,发现其他方法在解决非齐次边界问题上存在困难,而用格林函数法能解决非齐次边界条件的稳态热传导问题,且一维、二维或者三维问题的解在形式上都可以表示得非常紧凑,具有独特优势.最近一些研究者利用格林函数法对三维复杂结构的稳态热传导问题进行了研究,给出了平行板管道的三维稳态传热问题的温度场,获得了肋片的温度场分布,研究了周期加热条件下的稳态温度场<sup>[20-23]</sup>.

本文把格林函数应用到移动介质热传导能量方程中得到点热源对应的温度场的数学表达式,用特征函数和特征值计算稳态温度场,研究平行板间在壁面阶跃热流密度边界条件下考虑轴向热传导的温度场分布.本方法也可以应用到求解微管或多孔介质管道内流体的热传导.低  $Pe$  流体如液态金属的管内层流对流换热,必须考虑流体轴向导热的影响,对于这类问题的求解本方法有明显优势.本研究作以下假设:①介质满足局部热平衡条件,为稳态热传导问题;②移动介质的速度  $u = u(y, z)$ ,与  $x$  无关;③介质的热物性和温度无关.

## 1 理论表达式

### 1.1 稳态能量方程

用格林函数法求解的移动介质稳态热传导问题满足以下能量微分方程:

$$Cu \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \omega^2 T + S(x, y, z) \quad (1)$$

方程中  $S(x, y, z)$  是体积内热源,  $\omega^2 T$  是蓄效应,在周期性稳态传热中出现,本文讨论  $\omega = 0$  的情况.函数  $C = C(y, z)$ ,  $\kappa = \kappa(y, z)$ ,  $u = u(y, z)$ ,式中各项均与  $x$  无关,因此式(1)可简化为

$$Cu \frac{\partial T}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S(x, y, z) \quad (2)$$

式(2)左边第2项代表轴向导热,等式右边的前两项可以表示为  $\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$ ,因此式(2)可表示为

$$Cu \frac{\partial T}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + S(x, y, z) \quad (3)$$

当  $\kappa$  和  $C$  只与  $y, z$  有关,而  $u$  是一个常量,即  $u$  为恒定速度  $U$  时,无量纲温度的求解相当于当  $u = u(y, z)$  时对管内流体处于充分发展段的传热

问题的求解.上述稳态对流传热问题在边界  $\Gamma$  处的对流换热边界条件为

$$\kappa \partial T / \partial \mathbf{n}_\Gamma + hT = f(x, \mathbf{r}) \quad (4)$$

式(4)中  $\mathbf{n}$  为等温线上的法向单位矢量,当  $\kappa = 0$  时,为第1类边界条件;当  $h = 0$  时,为第2类边界条件;当  $\kappa \neq 0, h \neq 0$  时,为第3类边界条件.

### 1.2 格林函数法

在求解具体稳态导热问题时,首先需要在同样边界条件下得到与点热源相对应的格林函数,然后利用叠加原理给出导热问题的一般解,获得这一具体问题的温度场.在格林函数中用  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{r}'$  代表  $y-z$  坐标平面上的坐标矢量,用  $G$  代表  $G(x, \mathbf{r} | \xi, \mathbf{r}')$ ,这里  $\xi$  为点热源轴向坐标.一般地,格林函数  $G(x, \mathbf{r} | \xi, \mathbf{r}')$  表示由于在点  $(\xi, \mathbf{r}')$  处的点热源影响,叠加得到点  $(x, \mathbf{r})$  处的温度,如图1所示.图2为格林函数  $G(x, \mathbf{r} | \xi, \mathbf{r}')$  的示意图,为了求解上述导热问题,需讨论以下辅助方程:

$$Cu \frac{\partial G}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \nabla \cdot (\kappa \nabla G) + C \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(x - \xi) \quad (5)$$

在边界  $\Gamma$  处

$$\kappa \partial G / \partial \mathbf{n}_\Gamma + hG = 0 \quad (6)$$

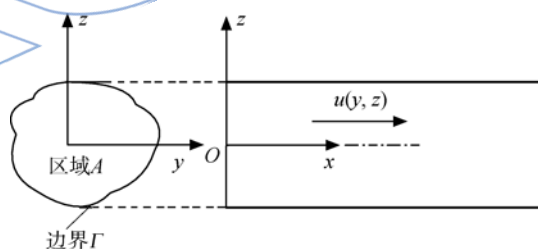


图1 移动区域及坐标系

Fig. 1 Moving media cross-section and coordinate system

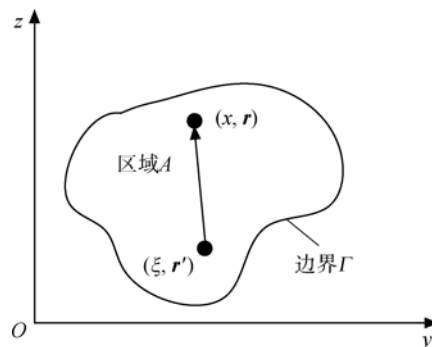


图2 格林函数  $G(x, \mathbf{r} | \xi, \mathbf{r}')$  图示

Fig. 2 Illustration of Green's function  $G(x, \mathbf{r} | \xi, \mathbf{r}')$

式(5)中包含了内热源项

$$C\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(x-\xi)$$

由式(5)和式(6)可知,格林函数满足的辅助问题具有齐次边界条件,这一边界条件是原边界  $\Gamma$  上的非齐次对流换热边界条件相对应的齐次形式,式(5)中  $\delta$  代表狄拉克函数<sup>[24-25]</sup>. 为了求解非齐次导热问题,必须得到该问题齐次边界条件下的格林函数  $G(x, \mathbf{r}|\xi, \mathbf{r}')$ , 这一齐次问题需用其他方法求解,用得到的格林函数来计算相应的非齐次边界条件下的温度场.

用格林函数法求解稳态温度场步骤如下:首先将式(5)中的  $\mathbf{r}$  换成  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}'$  换成  $\mathbf{r}$ ,  $x$  换成  $\xi$ ,  $\xi$  换成  $x$ , 得到式(7)

$$-Cu\frac{\partial G}{\partial \xi}-\kappa\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}=\nabla_0\cdot(\kappa\nabla_0 G)+C\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\delta(x-\xi) \quad (7)$$

$$T(x, \mathbf{r})=\frac{1}{C(\mathbf{r})}\left\{\int_{\xi=\xi_0}^{\infty} d\xi\int_{\Gamma}\kappa(\mathbf{r}')\left[G\frac{\partial T}{\partial n}-T\frac{\partial G}{\partial n}\right]_r d\Gamma'+\int_{\xi=\xi_0}^{\infty} d\xi\int_A GS(\xi, \mathbf{r}')dA'+\int_A C(\mathbf{r}')u(\mathbf{r}')G|_{\xi=\xi_0}T(\xi_0, \mathbf{r}')dA'-\int_A \kappa(\mathbf{r}')\left[G\frac{\partial T(\xi, \mathbf{r}')}{\partial \xi}\right]_{\xi=\xi_0}dA'+\int_A \kappa(\mathbf{r}')\left[\frac{\partial G}{\partial \xi}T(\xi, \mathbf{r}')\right]_{\xi=\xi_0}dA'\right\} \quad (10)$$

式(10)中  $A$  代表  $y$ - $z$  坐标平面上区域的横截面积,  $\Gamma$  是  $A$  的边界,当  $\xi\rightarrow\infty$  时,不考虑  $G|_{\xi\rightarrow\infty}$  和  $\partial G/\partial \xi|_{\xi\rightarrow\infty}$ . 式(10)中等号右边有 5 项:第 1 项是边界条件项;第 2 项是内热源项;最后 3 项是入口条件项. 式(10)给出了计算域内温度场的格林函数解,不同的边界条件有不同的格林函数法求解温度场公式,下面分别描述第 1 类和第 2 类边界条件下用格林函数法求解温度场的公式,第 3 类边界条件下的格林函数解暂不作论述.

### 1.3 格林函数的确定

格林函数的确定与管道的传热定义域有关,本文确定的格林函数是在齐次边界条件下,边界条件为  $T(0, y, z)$  和  $\partial T(x, y, z)/\partial x|_{x=0}$  时给定的温度场,通过此温度场和式(10)得到的温度场的比较得到格林函数. 设管内介质移动速度均匀,应用上述方法得到由无穷级数表达的温度场. 不考虑体积内热源,对于第 1, 2, 3 类齐次边界条件,可以得到以下方程式<sup>[1]</sup>:

$$T(x, y, z)=\sum_{m=1}^{\infty} B_m f_m(y, z)e^{-\lambda_m x} \quad (11)$$

对式(11)求导得

$$\frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x}=-\sum_{m=1}^{\infty} B_m \lambda_m f_m(y, z)e^{-\lambda_m x} \quad (12)$$

为了确定式(10)、式(11)中的  $B_m$ , 在  $x=0$  处有

其中  $\nabla_0$  代表  $(y', z')$  平面上的温度梯度,而式(3)在空间  $(\xi, \mathbf{r}')$  上的偏微分方程为

$$Cu\frac{\partial T}{\partial \xi}-\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}=\nabla_0\cdot(\kappa\nabla_0 T)+S(\xi, \mathbf{r}') \quad (8)$$

式(7)乘以  $-T$ , 加上式(8)乘以  $G$ , 得到式(9)

$$G\nabla_0\cdot(\kappa\nabla_0 T)-T\nabla_0\cdot(\kappa\nabla_0 G)+GS(\xi, \mathbf{r}')-C\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\delta(x-\xi)T=Cu\frac{\partial(TG)}{\partial \xi}-\kappa\left[\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}G-\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2}T\right]=Cu\frac{\partial(TG)}{\partial \xi}-\kappa\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(G\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(T\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)\right] \quad (9)$$

对等式两边在  $(y', z')$  横截面积  $A$  进行积分,  $\mathbf{r}'$  是积分变量,  $\xi\in[\xi_0, \infty]$ , 得到式(10), 即用格林函数法求解  $x$  轴方向上的温度场分布.

$$T(0, y, z)=\sum_{m=1}^{\infty} B_m f_m(y, z) \quad (13a)$$

$$\frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-\sum_{m=1}^{\infty} B_m \lambda_m f_m(y, z) \quad (13b)$$

根据正交性原理,将式(13a)两边同乘以  $(\kappa\lambda_n + Cu)f_n(y, z)dydz$ , 将式(13b)两边同乘以  $-\kappa f_n(y, z)dydz$ , 把得到的两个式子进行叠加,得到

$$(\kappa\lambda_n + Cu)T(0, y, z)f_n(y, z)dydz - \kappa[\partial T(x, y, z)/\partial x]_{x=0}f_n(y, z)dydz =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_m [\kappa(\lambda_m + \lambda_n) + Cu]f_m(y, z)f_n(y, z)dydz \quad (14)$$

可以对式(14)两边在横截面上面积  $A$  进行积分, 然后利用正交性,得到式(15a)

$$B_n = \frac{1}{N_n} \int_A (\kappa\lambda_n + Cu)T(0, y, z)f_n(y, z)dA - \frac{1}{N_n} \int_A \kappa[\partial T(x, y, z)/\partial x]_{x=0}f_n(y, z)dA \quad (15a)$$

其中

$$N_n = \int_A (2\kappa\lambda_n + Cu)[f_n(y, z)]^2 dA \quad (15b)$$

在  $x\geq 0$  区域进行正交计算时,  $dA=dydz$ ,  $m=n$ . 式(15a)、式(15b)中的  $x, y, z$  是变量, 为了

区分,把式(15a)代入式(11)时,用  $\xi, y', z'$  代替  $x, y, z$ , 可得当  $x \geq 0$  时的温度场公式(16)

$$T(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N_m} e^{-\lambda_m x} \int_A C u T(0, y', z') f_m(y, z) f_m(y', z') dA' +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{N_m} e^{-\lambda_m x} \int_A \kappa T(0, y', z') f_m(y, z) f_m(y', z') dA' -$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N_m} e^{-\lambda_m x} \int_A \kappa \left[ \frac{\partial T(\xi, y', z')}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} f_m(y, z) f_m(y', z') dA' \quad (16)$$

使用式(16)也可以计算  $x < 0$  时的温度场分布情况,此时  $dA' = dy' dz'$ ,  $\lambda_m = -\beta_m$ ,  $u = -u$ , 随着  $x$  的方向发生变化,上式中  $\xi$  的符号也发生改变,所以最后一项取负。

当  $\xi_0 = 0$  时,齐次边界条件的计算区域没有体积内热源,式(10)可表示为

$$T(x, y, z) = \frac{1}{C(y, z)} \left\{ \int_A C(y', z') u(y', z') G|_{\xi=0} T(\xi_0, y', z') dA' + \right.$$

$$\left. \int_A \kappa(y', z') \left[ \frac{\partial G}{\partial \xi} T(\xi, y', z') \right]_{\xi=0} dA' - \int_A \kappa(y', z') \left[ G \frac{\partial T(\xi, y', z')}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} dA' \right\} \quad (17)$$

式中  $C(y, z)$  与  $y'$  和  $z'$  无关,计算时把它放入被积函数中去,和  $G(x, y, z | \xi, y', z')$  合并,为了保证式(16)和式(17)相同,  $G/C(y, z)$  应取下列形式:

$$\frac{G(x, y, z | \xi, y', z')}{C(y, z)} =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m(y, z) f_m(y', z')}{N_m} e^{-\lambda_m(x-\xi)} \quad (18a)$$

其中

$$N_m =$$

$$\int_A [2\lambda_m \kappa + C(y', z') u(y', z')] [f_m(y', z')]^2 dA \quad (18b)$$

$N_m$  的推导从略。式(17)给出了点热源在  $x = \xi$  处的格林函数以及点热源对其他各处即  $x > 0$  处的影响。格林函数法也可用于  $x < 0$  的位置,此时需将式(18a)、式(18b)中的  $\lambda_m$  用  $-\beta_m$  来代替,将  $N_m$  用  $N_{m,1}$  来代替,  $N_{m,1} = -N_m$ 。对于具体温度场的求解,当移动介质的特征函数和相应的特征值确定时,运用式(18a)可以得到移动介质的格林函数,其边界可以是第1类、第2类或第3类边界条件。因此,用此类方法可以得到不同类型管道中移动介质的温度场。

#### 1.4 边界条件的影响

式(10)给出了用格林函数法求解温度场的表

达式,可以用以解决各种非齐次边界条件的传热问题,以下是对第1类和第2类边界条件下传热问题的研究。

##### 1.4.1 第1类边界条件

假设当  $x = -\infty$  时,移动介质的温度  $T_i$  均匀,管道中移动固体的过余温度为  $T - T_i$ ,  $\partial T / \partial \xi = 0$ 。对于第1类边界条件,在边界上的格林函数  $G = 0$ 。当  $\xi_0 = -\infty$ ,  $S(x, y, z) = 0$  时,式(10)转化为

$$T(x, y, z) - T_i =$$

$$-\frac{\kappa}{C} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\Gamma} \left\{ [T_w(\xi) - T_i] \frac{\partial G}{\partial n} \right\}_{\Gamma'} d\Gamma' \quad (19)$$

式中  $T_w(\xi)$  和  $y, z$  无关。在此边界条件下,格林函数有两种情况:

1) 当  $x < \xi$  时,  $\lambda_m < 0$  时

$$G_1(x, y, z | \xi, y', z') =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{C}{N_m} \right] f_m(y, z) f_m(y', z') e^{|\lambda_m|(x-\xi)} \quad (20a)$$

此时  $\beta_m = |\lambda_m|$ ,  $g_m(y, z) = f_m(y, z)$ ,  $N_{m,1} = N_m$ 。

2) 当  $x > \xi$  时,  $\lambda_m \geq 0$  时

$$G_2(y, z, x | y', z', \xi) =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{C}{N_m} \right] f_m(y, z) f_m(y', z') e^{-\lambda_m(x-\xi)} \quad (20b)$$

将式(20a)、式(20b)代入式(19)得到式(21)

$$T(x, y, z) - T_i = -\kappa \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m(y, z)}{N_m} \int_{\xi=-\infty}^x [T_w(\xi) - T_i] e^{-\lambda_m(x-\xi)} d\xi \times \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial f_m(y', z')}{\partial n} \right]_{\Gamma'} d\Gamma' + \right.$$

$$\left. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m(y, z)}{N_{m,1}} \int_{\xi=x}^{\infty} [T_w(\xi) - T_i] e^{\beta_m(x-\xi)} d\xi \times \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial g_m(y', z')}{\partial n} \right]_{\Gamma'} d\Gamma' \right\} \quad (21)$$

式中当  $x < 0$  时,  $T_w(x) = T_i$ ,  $T_i$  是常量;当  $x \geq 0$  时,  $T_w(x) = T_w$ 。简化式(21),得到  $x < 0$  时的式(22)

$$T(x, y, z) - T_i = - \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\xi=0}^{\infty} \kappa(T_w - T_i) \frac{g_m(y, z)}{N_{m,1}} e^{\beta_m(x-\xi)} d\xi \times \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial g_m(y', z')}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma'} d\Gamma' \quad (22)$$

当  $x > 0$  时,

$$T(x, y, z) - T_i = - \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m(y, z)}{N_m} \int_{\xi=0}^x \kappa(T_w - T_i) e^{-\lambda_m(x-\xi)} d\xi \times \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial f_m(y', z')}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma'} d\Gamma' + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m(y, z)}{N_{m,1}} \int_{\xi=x}^{\infty} \kappa(T_w - T_i) e^{\beta_m(x-\xi)} d\xi \times \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial g_m(y', z')}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma'} d\Gamma' \right\} \quad (23)$$

将式(11)代入式(3),令  $S(x, y, z) = 0$ , 可得

$$\nabla \cdot [\kappa \nabla f_m(y, z)] = -Cu\lambda_m f_m(y, z) - \kappa\lambda_m^2 f_m(y, z) \quad (24)$$

对式(24)运用高斯散度定理进行转换得

$$\kappa \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial f_m(y', z')}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma'} d\Gamma' = - \int_A (Cu\lambda_m + \kappa\lambda_m^2) f_m(y', z') dA' \quad (25)$$

式(25)中,特征值  $\lambda_m$  可正可负. 当  $x < 0$  时,过余温度  $\theta_1 = T(x, y, z) - T_i$ , 所以  $\theta_1 = 0$ . 将式(22)、式(25)代入式(21)得

$$\theta_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\xi=0}^{\infty} (T_w - T_i) \frac{g_m(y, z)}{N_{m,1}} e^{\beta_m(x-\xi)} d\xi \int_A (Cu - \kappa\beta_m) g_m(y', z') dA' = \sum_{m=1}^{\infty} (T_w - T_i) \frac{\int_A (Cu - \kappa\beta_m) g_m(y, z) g_m(y', z') dA'}{\int_A (Cu - 2\kappa\beta_m) [g_m(y', z')]^2 dA'} e^{\beta_m x} \quad (26)$$

$N_m$  推导从略,  $N_{m,1} = -N_m$ , 当  $\lambda_m < 0$  时,  $\beta_m = -\lambda_m$ . 对于式(25), 当  $x \geq 0$  时, 过余温度  $\theta_2 = T(x, y, z) - T_w$ , 其中当  $x = 0$  时, 过余温度必须满足  $\left[ \frac{\partial \theta_2(x, y, z)}{\partial x} \right]_{x=0} = \left[ \frac{\partial \theta_1(x, y, z)}{\partial x} \right]_{x=0}$  和  $\theta_2(0, y, z) = \theta_1(0, y, z) - (T_w - T_i)$ .

当  $\lambda_m > 0$ , 由式(25)得式(27)

$$\theta_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (T_w - T_i) \frac{\int_A (\kappa\lambda_m + Cu) f_m(y, z) f_m(y', z') dA'}{\int_A (2\kappa\lambda_m + Cu) [f_m(y', z')]^2 dA'} e^{-\lambda_m x} \quad (27)$$

将式(23)、式(25)代入式(21), 对  $\xi$  进行积分, 得到式(28)

$$\frac{T(x, y, z) - T_i}{T_w - T_i} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m(y, z)}{N_{m,1}} \int_A (Cu - \kappa\beta_m) g_m(y', z') dA' + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m(y, z)}{N_m} (Cu + \kappa\lambda_m) f_m(y', z') dA' - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m(y, z)}{N_m} e^{-\lambda_m x} (Cu + \kappa\lambda_m) f_m(y', z') dA' \quad (28)$$

#### 1.4.2 第2类边界条件

对上述第1类边界条件下稳态温度场的格林函数进行适当修改, 可以得到第2类边界条件的格林函数解. 入口处  $\xi = -\infty$ ,  $S(x, y, z) = 0$ , 壁面热流密度为  $\kappa T / \partial \mathbf{n}$ , 通过式(10)得到温度场的格林函数解.

$$T(x, y, z) - T_i = \frac{1}{C(\mathbf{r})} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\Gamma} \kappa(\mathbf{r}') \left[ G \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma'} d\Gamma' = \frac{1}{C(\mathbf{r})} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} d\xi \int_{\Gamma} (qG)_{\Gamma'} d\Gamma' \quad (29)$$

其中  $q = \kappa T / \partial \mathbf{n}$ , 格林函数如式(20a)和式(20b)所示. 热流密度  $q$  与  $x, y, z$  有关, 但当  $q = q_w(x)$  时, 温度场为

1) 当  $x < \xi$  时,  $\lambda_m \leq 0$

$$T(x, y, z) - T_i = \sum_{m=1}^{\infty} q_w(\xi) \frac{f_m(y, z)}{N_m} e^{-\lambda_m(x-\xi)} d\xi \int_{\Gamma} [f_m(y', z')]_{\Gamma'} d\Gamma' \quad (30a)$$

2) 当  $x > \xi$  时,  $\lambda_m > 0$

$$T(x, y, z) - T_i = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} q_w(\xi) \frac{f_m(y, z)}{N_m} e^{-\lambda_m(x-\xi)} d\xi \int_{\Gamma} [f_m(y', z')]_{\Gamma'} d\Gamma' +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{\xi=x}^{\infty} q_w(\xi) \frac{g_m(y, z)}{N_{m,1}} e^{-|\lambda_m|(x-\xi)} d\xi \int_{\Gamma} [g_m(y', z')]_{\Gamma'} d\Gamma \quad (30b)$$

当  $\lambda_m$  取正时,公式中使用  $N_m$ ;当  $\lambda_m$  取负时式中使用  $N_{m,1}$ ,通过式(18b)可以得到  $N_m$  和  $N_{m,1}$ . 在圆管中,  $\Gamma=2\pi r_0$ ,  $r_0$  为圆管半径.

### 1.5 特征值的确定

特征值  $\lambda_m$  与管道的几何形状、管内移动介质的热物性有关. 对于热物性和速度为常量的规则管道,式(21)可以表示为

$$\kappa \left[ \frac{\partial^2 f_m(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_m(y, z)}{\partial z^2} \right] = - (CU\lambda_m + \kappa\lambda_m^2) f_m(y, z) = \kappa(\gamma_m/L_c)^2 f_m(y, z) \quad (31a)$$

其中  $f_m(y, z)$  是满足具有齐次边界条件具体问题的特征函数. 根据式(31a),可求得特征函数  $f_m(y, z)$  和特征参数  $\gamma_m$ . 特征参数  $\lambda_m$  通过式(31b)获得

$$\lambda_m^2 + \left( \frac{CU}{\kappa} \right) \lambda_m - \frac{\gamma_m^2}{L_c^2} = 0 \quad (31b)$$

根据式(31b)可得

$$\lambda_m L_c = \frac{1}{2} \left[ - \left( \frac{CUL_c}{\kappa} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{CUL_c}{\kappa} \right)^2 + 4\gamma_m^2} \right] = \frac{Pe}{2} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\gamma_m^2}{Pe^2}} \right] \quad (31c)$$

在平行板管道内( $L_c=H$ ),移动介质的取值范围  $y \in [-H, +H]$ ,  $f_m(r) = \cos(\gamma_m y/H)$ ,  $\gamma_m = m\pi$ ,式(31c)中,  $L_c, \gamma_m$  为未知数,如图3所示

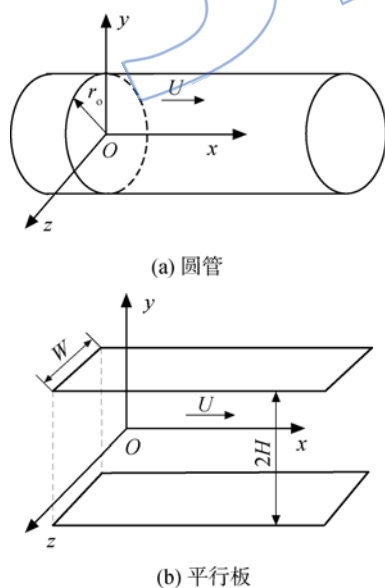


图3 圆管内及平行板间移动介质轴向导热示意图

Fig. 3 Axial conduction schematic of moving media in a circular tube and between parallel plates

示. 在半径为  $r_0$  的圆管内( $L_c=r_0$ ),边界条件为第1类边界条件时,在式(31a)中,  $f_m(r) = J_0(\gamma_m \bar{r})$ ,  $\bar{r} = r/r_0$ ,  $\gamma_m$  是函数  $J_0(\gamma) = 0$  的第  $m$  个根;对于第2类边界条件,  $\gamma_m$  是函数  $J_1(\gamma) = 0$  的第  $m$  个根.

## 2 计算实例与分析

本文研究了一个间距为  $2H$ 、宽度为  $W$  的平行板间匀速移动介质和一个半径为  $r_0$  的圆管中匀速移动介质的稳态热传导,两种情况下介质速度均为常数  $U$ ,如图4所示,分别对两种热流密度分布进行讨论.

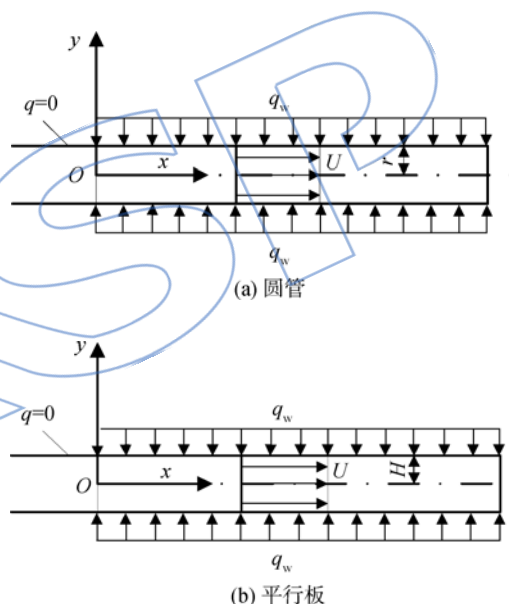


图4 平行板、圆管管壁热流密度分布示意图(半无限区域)

Fig. 4 Heat flux distribution on the circular tube inner wall and the inner surfaces of the parallel plates (semi-infinite length)

### 2.1 热流密度分布情况1

壁面热流密度分布

$$q_w(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ q_w & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

在  $x$ - $y$  平面上使用格林函数,用式(30a)计算温度场,当  $x < 0$  时,有以下形式

$$T(x, y) - T_i = \sum_{m=0}^{\infty} q_w W \frac{\cos(m\pi \bar{y}) \cos(m\pi)}{N_{m,1} \beta_m} e^{\beta_m x} \quad (32a)$$

其中  $\bar{y} = (y/H)$ , 当  $\lambda_m < 0$  时,  $\beta_m = |\lambda_m|$ ,  $\lambda_m$  由式(31c)获得. 式(32a)中,求和级数从  $m=0$  开始,

此时公式受特征函数的影响. 在平行板管道中,  $W=1, dA=Wdy$ .  $N_{m,1}$  的下角标 1 代表取相反的特征值.  $L_c=H, \bar{x}=(x/H)/Pe, Pe=CUH/\kappa$ , 式(32a)可变为

$$\frac{\kappa[T(x, y) - T_i]}{q_w H} = \frac{1}{Pe^2} \exp(Pe^2 \bar{x}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(\gamma_m \bar{y})}{\hat{\beta}_m(2\hat{\beta}_m/Pe^2 - 1)} e^{\hat{\beta}_m \bar{x}} \quad (32b)$$

从式(31c)可以得到, 当  $\lambda_m < 0$  时, 定义  $\hat{\beta}_m = |\lambda_m| \cdot HPe$

$$\hat{\beta}_m = Pe^2/2(\sqrt{1+4\gamma_m^2/Pe^2} + 1) \quad (33a)$$

当  $\lambda_m > 0$  时, 定义  $\hat{\lambda}_m = \lambda_m HPe$

$$\hat{\lambda}_m = Pe^2/2(\sqrt{1+4\gamma_m^2/Pe^2} - 1) \quad (33b)$$

将式(32b)的分子和分母同时乘以  $\hat{\lambda}_m$ , 用式(33a)、式(33b)求出  $\hat{\lambda}_m \hat{\beta}_m = \gamma_m^2 Pe^2$ , 因此

$$\frac{1}{\hat{\beta}_m(2\hat{\beta}_m/Pe^2 - 1)} = \frac{\hat{\lambda}_m}{\hat{\lambda}_m \hat{\beta}_m(2\hat{\beta}_m/Pe^2 - 1)} = \frac{\hat{\lambda}_m}{\gamma_m^2 Pe(2\hat{\beta}_m/Pe^2 - 1)} = \frac{\hat{\lambda}_m}{\gamma_m^2(2\hat{\beta}_m - Pe^2)} \quad (34)$$

从式(33a)、式(33b)可以得到  $\hat{\beta}_m - \hat{\lambda}_m = Pe^2$ , 所以  $2\hat{\beta}_m - Pe^2 = \hat{\beta}_m - \hat{\lambda}_m$ , 因此,

$$\frac{1}{\hat{\beta}_m(2\hat{\beta}_m/Pe^2 - 1)} = \frac{\hat{\lambda}_m}{\gamma_m^2(\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m)} \quad (35)$$

将上式代入式(32b)得到式(36)

$$\frac{\kappa(T - T_i)}{q_w H} = \frac{1}{Pe^2} \exp(Pe^2 \bar{x}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{\gamma_m^2} \frac{\hat{\lambda}_m}{(\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m)} \cos(\gamma_m \bar{y}) \exp(\hat{\beta}_m \bar{x}) \quad (36)$$

$$T(x, y) - T_i = \frac{q_w}{PeCU} + \frac{q_w x}{CUH} + \sum_{m=1}^{\infty} q_w \frac{\cos(m\pi y/H) \cos(m\pi)}{N_{m,1} \hat{\beta}_m} + \sum_{m=1}^{\infty} q_w \frac{\cos(m\pi y/H) \cos(m\pi)}{N_m \lambda_m} (1 - e^{-\lambda_m x}) \quad (37a)$$

式(37a)的前两项分别是式(30a)和式(30b)的第 1 个特征值. 当  $m=0$  时, 式(37a)的无量纲形式为

$$\frac{\kappa[T(x, y) - T_i]}{q_w H} = \frac{1}{Pe^2} + \bar{x} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(m\pi \bar{y})}{\hat{\lambda}_m(2\hat{\lambda}_m/Pe^2 + 1)} (1 - e^{-\hat{\lambda}_m \bar{x}}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(m\pi \bar{y})}{\hat{\beta}_m(2\hat{\beta}_m/Pe^2 + 1)} \quad (37b)$$

式(37b)可以转化为

$$\frac{\kappa[T(x, y) - T_i]}{q_w H} = \frac{1}{Pe^2} + \bar{x} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(m\pi \bar{y})}{m^2 \pi^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(m\pi \bar{y})}{\hat{\lambda}_m(2\hat{\lambda}_m/Pe^2 + 1)} e^{-\hat{\lambda}_m \bar{x}} \quad (37c)$$

式(37c)等号右边的第 1 个求和项可由式(38)表达<sup>[1]</sup>

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(m\pi \bar{y})}{m^2 \pi^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos[m\pi(1 - \bar{y})]}{m^2} = \frac{1}{2}(1 - \bar{y})^2 - (1 - \bar{y}) + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\bar{y}^2 - \frac{1}{6} \quad (38)$$

将式(38)代入式(37c)中, 可得

$$\frac{\kappa(T - T_i)}{q_w H} = \frac{1}{Pe^2} - \frac{1}{6} + \bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y}^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{\gamma_m^2} \frac{\hat{\beta}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} \cos(\gamma_m \bar{y}) \exp(-\hat{\lambda}_m \bar{x}) \quad (39)$$

对于圆管中匀速移动介质, 当  $x < 0$  时, 边界上无量纲壁温随  $\bar{x}$  变化如下:

$$\frac{\kappa(T - T_i)}{q_w H} = \frac{1}{Pe^2} \exp(Pe^2 \bar{x}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma_m^2 J_0(\gamma_m)} \frac{\hat{\lambda}_m}{(\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m)} J_0(\gamma_m \bar{r}) \exp(\hat{\beta}_m \bar{x}) \quad (40)$$

当  $x \geq 0$  时, 边界上无量纲壁温随  $\bar{x}$  变化如下:

$$\frac{\kappa(T - T_i)}{q_w H} = \frac{2}{Pe^2} - \frac{1}{4} + 2\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{r}^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma_m^2 J_0(\gamma_m)} \left[ \frac{\hat{\beta}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} \right] J_0(\gamma_m \bar{r}) \exp(-\hat{\lambda}_m \bar{x}) \quad (41)$$

式(36)和式(39)具有相同的收敛特性, 当  $\bar{y}=0$  时, 误差小于  $1/N^2$ ,  $N=\max(m)$ , 随着  $\bar{x}$  的增大, 误差按指数规律逐渐减小. 当  $\bar{y}=1$  时, 由上述两式计算的无量纲温度逐渐减小, 误差变大. 式(39)指数形式的最后一项决定收敛性,  $|\lambda_m|$  最大值可由式(42)计算:

$$\hat{\lambda}_m \bar{x} = \frac{Pe}{2} \left[ \sqrt{1 + \left[ \frac{2N\pi}{Pe} \right]^2} - 1 \right] \frac{x}{H} = K \quad (42)$$

通过解式(42)可以得到  $N$  值,

$$N = \max \left[ Pe \sqrt{\left[ \frac{K}{(x/H)(Pe/2)} + 1 \right]^2 - 1} / 2\pi \right] \quad (43)$$

表 1 是  $N$  为特定值  $\bar{y}=1$  处的无量纲温度,由表可知  $K=5$  就可满足计算精度要求. 图 5 是按圆管中匀速移动介质无量纲温度公式得到的  $\bar{y}=1$  处  $\kappa(T_w-T_i)/(q_w H)$  随  $x/H$  和  $Pe$  的变化曲线.

由图 5(a)可知,随着  $Pe$  增大,在  $x<0$  区

域,即  $q_w(x)=0$  时,曲线斜率增大,无量纲壁温变化非常快;在  $x>0$  区域,即  $q_w(x)=q_w$  时,无量纲壁温变化缓慢. 由图 5(b)可知  $x/H$  为定值时  $Pe$  越大,无量纲温度越小. 图 6 是  $\bar{y}=1$  处平行板间匀速移动介质无量纲温度变化曲线,变化

表 1 当  $Pe=2$  时,式(31)用格林函数法求解温度场的收敛特性

Table 1 Temperature convergence results of equation (31) with Green's function method when  $Pe=2$

| $x/H$ | $N(K=2.5)$ | $\kappa(T_w-T_i)/(q_w H)$ | $N(K=5)$ | $\kappa(T_w-T_i)/(q_w H)$ | $N(K=7.5)$ | $\kappa(T_w-T_i)/(q_w H)$ |
|-------|------------|---------------------------|----------|---------------------------|------------|---------------------------|
| 0.005 | 160        | 0.39448031                | 319      | 0.39447769                | 478        | 0.39447767                |
| 0.010 | 80         | 0.40988187                | 160      | 0.40987939                | 240        | 0.40987938                |
| 0.020 | 41         | 0.43595945                | 80       | 0.43595657                | 120        | 0.43595656                |
| 0.040 | 21         | 0.47974586                | 41       | 0.47974197                | 56         | 0.47974196                |
| 0.050 | 17         | 0.49929248                | 33       | 0.49928825                | 49         | 0.49928824                |
| 0.060 | 14         | 0.51778901                | 27       | 0.51778370                | 38         | 0.51778374                |
| 0.080 | 11         | 0.55239877                | 21       | 0.55239410                | 29         | 0.55239409                |
| 0.100 | 9          | 0.58462478                | 17       | 0.58462013                | 25         | 0.58462012                |

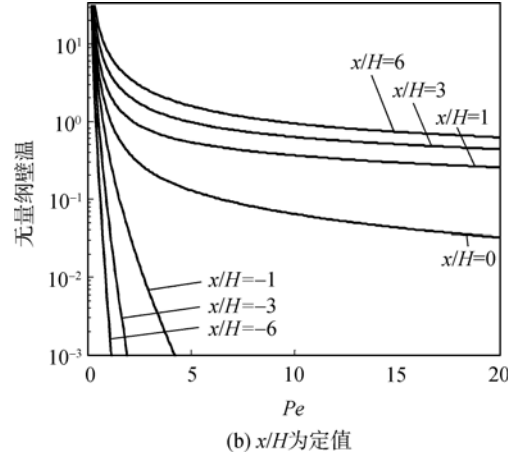
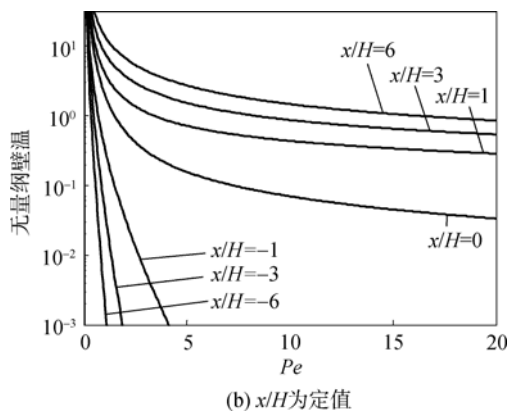
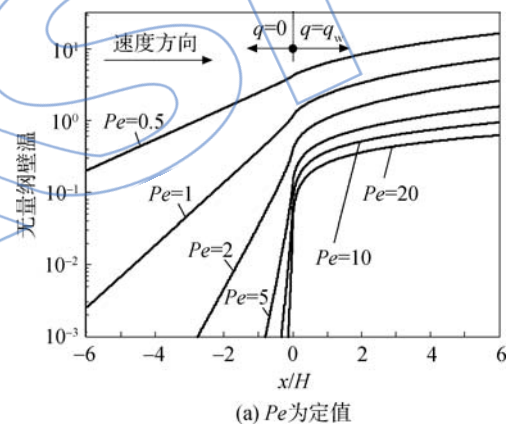
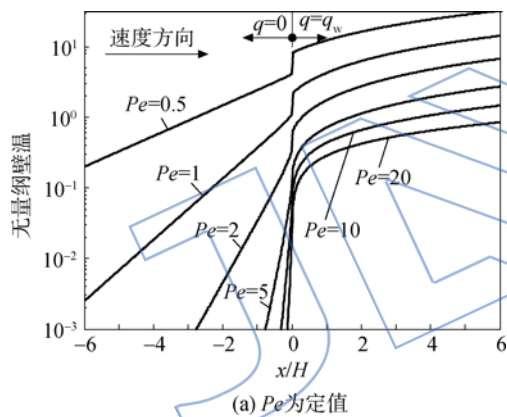


图 5 圆管中匀速移动介质无量纲壁温变化曲线  
(热流密度分布情况 1)

Fig. 5 Variation curves of dimensionless wall temperature of moving media at a constant velocity in the circular tube (heat flux distribution 1)

图 6 平行板间匀速移动介质无量纲壁温变化曲线  
(热流密度分布情况 1)

Fig. 6 Variation curves of dimensionless wall temperature of moving media at a constant velocity between the parallel plates (heat flux distribution 1)

趋势和图5类似,但图5(a)在  $x=0$  处温度变化急剧,在相同的  $x/H$  和  $Pe$  条件下,  $\bar{y}=1$  处平行板间匀速移动介质无量纲温度低于圆管中匀速移动介质无量纲温度。

## 2.2 热流密度分布情况 2

如图7所示,热流密度分布为

$$q_w(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ q_w & 0 \leq x \leq \Delta x \\ 0 & \Delta x < x < \infty \end{cases}$$

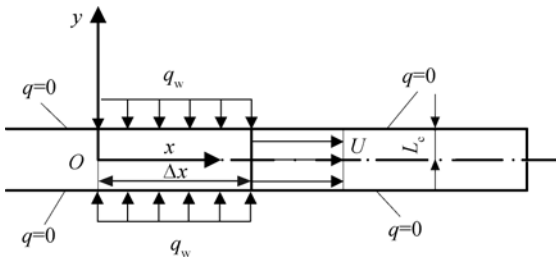


图7 平行板和圆形管道热流密度分布图(有限区域)

Fig. 7 Heat flux distribution on the inner surfaces of the parallel plates and the circular tube inner wall (finite length)

对于圆形管内匀速移动介质,将式(40)、式(41)进行图像变换可以得到  $\bar{r}=1$  ( $\bar{y}=1$ ) 的边界上的稳态温度场(式(44))

当  $x < 0$  时

$$\begin{aligned} \frac{\kappa(T - T_i)}{q_w H} = & \frac{1}{Pe^2} \exp(Pe^2 \bar{x}) - \frac{1}{Pe^2} \exp[Pe^2(\bar{x} - 1)] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma_m^2 J_0(\gamma_m)} \frac{\hat{\lambda}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} J_0(\gamma_m \bar{r}) \exp(\hat{\beta}_m \bar{x}) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma_m^2 J_0(\gamma_m)} \frac{\hat{\lambda}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} J_0(\gamma_m \bar{r}) \exp[\hat{\beta}_m(\bar{x} - 1)] \end{aligned} \quad (44)$$

当  $0 \leq x \leq 1$  时(有均匀热流密度区域)

$$\begin{aligned} \frac{\kappa(T - T_i)}{q_w H} = & \frac{2}{Pe^2} - \frac{1}{4} + 2\bar{x} + \frac{1}{2} \bar{r}^2 - \frac{1}{Pe^2} \exp[Pe^2(\bar{x} - 1)] - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma_m^2 J_0(\gamma_m)} \frac{\hat{\beta}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} J_0(\gamma_m \bar{r}) \exp(-\hat{\lambda}_m \bar{x}) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma_m^2 J_0(\gamma_m)} \frac{\hat{\lambda}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} J_0(\gamma_m \bar{r}) \exp[\hat{\beta}_m(\bar{x} - 1)] \end{aligned} \quad (45)$$

当  $1 < x$  时

$$\begin{aligned} \frac{\kappa(T - T_i)}{q_w H} = & 2 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma_m^2 J_0(\gamma_m)} \frac{\hat{\beta}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} J_0(\gamma_m \bar{r}) \exp(-\hat{\lambda}_m \bar{x}) + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma_m^2 J_0(\gamma_m)} \frac{\hat{\beta}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} J_0(\gamma_m \bar{r}) \exp[-\hat{\lambda}_m(\bar{x} - 1)] \end{aligned} \quad (46)$$

参照上述方法,对于平行板间匀速移动介质式(36)和式(39)进行图像变换可以得到如下结论:

当  $x < 0$  时

$$\begin{aligned} \frac{\kappa(T - T_i)}{q_w H} = & -\frac{1}{Pe^2} \exp[Pe^2(\bar{x} - 1)] + \frac{1}{Pe^2} \exp(Pe^2 \bar{x}) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{\gamma_m^2} \frac{\hat{\lambda}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} \cos(\gamma_m \bar{y}) \exp[\hat{\beta}_m(\bar{x} - 1)] + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{\gamma_m^2} \frac{\hat{\lambda}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} \cos(\gamma_m \bar{y}) \exp(\hat{\beta}_m \bar{x}) \end{aligned} \quad (47)$$

当  $0 \leq x \leq 1$  时

$$\begin{aligned} \frac{\kappa(T - T_i)}{q_w H} = & \frac{1}{Pe^2} - \frac{1}{6} + \bar{x} + \frac{1}{2} \bar{y} - \\ & \frac{1}{Pe^2} \exp[Pe^2(\bar{x} - 1)] - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{\gamma_m^2} \frac{\hat{\beta}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} \cos(\gamma_m \bar{y}) \exp(-\hat{\lambda}_m \bar{x}) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{\gamma_m^2} \frac{\hat{\lambda}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} \cos(\gamma_m \bar{y}) \exp[\hat{\beta}_m(\bar{x} - 1)] \end{aligned} \quad (48)$$

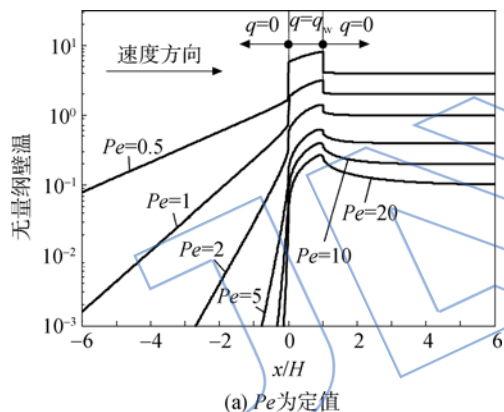
当  $1 < x$  时

$$\begin{aligned} \frac{\kappa(T - T_i)}{q_w H} = & 1 + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{\gamma_m^2} \frac{\hat{\beta}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} \cos(\gamma_m \bar{y}) \exp[-\hat{\lambda}_m(\bar{x} - 1)] - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{\gamma_m^2} \frac{\hat{\beta}_m}{\hat{\lambda}_m + \hat{\beta}_m} \cos(\gamma_m \bar{y}) \exp(-\hat{\lambda}_m \bar{x}) \end{aligned} \quad (49)$$

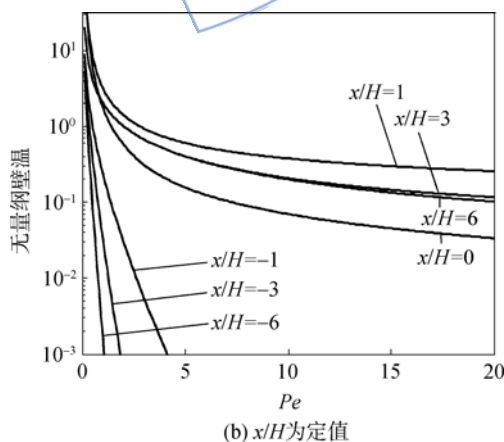
用式(44)~式(46),可以得到  $0 \leq x/H \leq 1$  区域内壁面热流密度  $q_w$  均匀加热条件下  $\bar{r}=1$  ( $\bar{y}=1$ ) 处圆管内匀速移动介质的无量纲温度  $\kappa(T_w - T_i)/(q_w H)$  随  $x/H$  和  $Pe$  变化的曲线,如图8所示.可以看出  $Pe$  越大无量纲温度变化越剧烈.对比图5(b)和图8(b)可以看出,在  $x/H < 0$  时,无量纲温度随  $Pe$  的变化几乎一样,但图8(b)中等值线  $x/H=3$  和  $x/H=6$  在等值线  $x/H=0$  和  $x/H=1$  之间且等值线  $x/H=3$  和  $x/H=6$  几乎

重合,而图 5(b)中等值线  $x/H=3$  和  $x/H=6$  在等值线  $x/H=1$  以上且等值线  $x/H=6$  高于等值线  $x/H=3$ .

用式(47)~式(49),可以得到  $0 \leq x/H \leq 1$  区域内壁面热流密度  $q_w$  均匀加热条件下,  $\bar{y}=1$  处平行板间匀速移动介质的无量纲温度  $\kappa(T_w - T_i)/(q_w H)$  随  $x/H$  和  $Pe$  变化的曲线,如图 9(a)所示,曲线的变化趋势和图 8(a)中曲线相似,但图 8(a)中曲线在热流密度开始和结束处温度变化剧烈.从图 9(a)中可知,当  $Pe=1$  时,无量纲温度迅速上升并趋于 1,在相同的  $x/H$  和  $Pe$  条件下,  $\bar{y}=1$  处平行板间匀速移动介质无量纲温度低于圆管中匀速移动介质无量纲温度.对比图 9(b)和图 8(b)可以看出,随  $Pe$  增大,平行板间匀速流动的介质的无量纲温度变化趋势与圆管中匀速移动介质无量纲温度变化趋势相似,但图 9(b)的等值线  $x/H=3$  和  $x/H=6$  有较大间距.



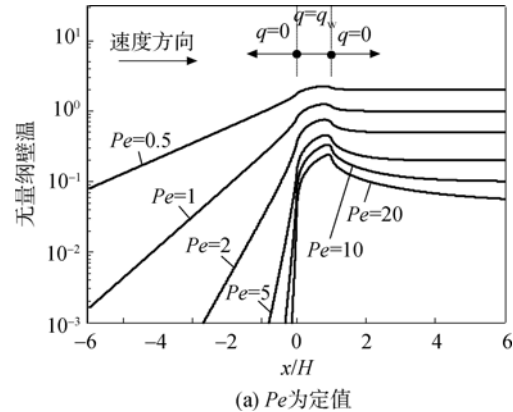
(a)  $Pe$  为定值



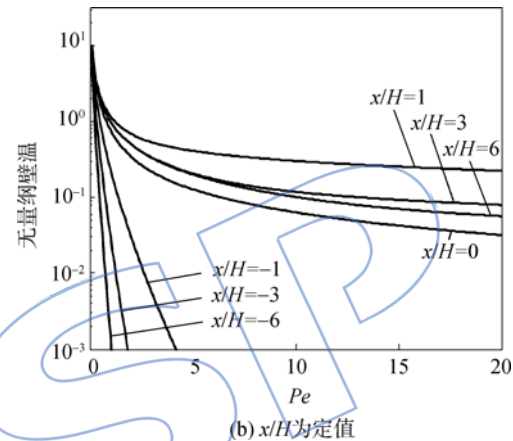
(b)  $x/H$  为定值

图 8 圆管中匀速移动介质的无量纲壁温分布  
(热流密度分布情况 2)

Fig. 8 Dimensionless wall temperature of moving media at a constant velocity in the circular tube (heat flux distribution 2)



(a)  $Pe$  为定值



(b)  $x/H$  为定值

图 9 平行板间匀速移动介质无量纲壁温度分布  
(热流密度分布情况 2)

Fig. 9 Dimensionless wall temperature of moving media at a constant velocity between the parallel plates (heat flux distribution 2)

### 3 结 论

本文利用格林函数法求解移动介质的稳态温度场,得出平行板间与圆管内移动介质温度分布计算式,绘制了无量纲壁温随  $x/H$  和  $Pe$  变化的曲线图.结果表明:①在半无限大区域有均匀热流密度的条件下,  $Pe$  越大无量纲温度越小,在无壁面热流密度区域温度变化越剧烈;在有均匀壁面热流密度的区域温度随  $x/H$  的变化几乎不受  $Pe$  大小的影响.②在有限区域有均匀热流密度的条件下,  $Pe$  越大无量纲温度越小,与半无限大区域均匀加热的情況类似;在全计算域内温度变化越剧烈,与半无限大区域均匀加热的情況有显著差异.③通过稳态温度场格林函数解可以解决管道中移动介质的热传导问题以及航空器或电子器件冷却中广泛使用的微管或多孔管中流体的热传导问题,有重要的实际应用价值.

## 参考文献:

- [1] Beck J V, Cole K D, Haji-Sheikh A, et al. Heat conduction using Green's functions[M]. Washington DC: Hemisphere, 1992.
- [2] 奥齐西克 M N. 热传导[M]. 俞昌铭, 译. 北京: 高等教育出版社, 1983.
- [3] Nagasue H. Steady-state heat transfer with axial conduction in laminar flow in a circular tube with a specified temperature or heat flux wall[J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 1981, 24(11): 1823-1832.
- [4] Haji-Sheikh A, Amos D E, Beck J V. Axial heat conduction of heat through a moving fluid in a semiinfinite region[J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 2008, 51(19): 4651-4658.
- [5] Haji-Sheikh A, Amos D E, Beck J V. Temperature field in a moving semi infinite region with a prescribed wall heat flux[J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 2009, 52(7): 2092-2101.
- [6] Tiselj I, Hetsroni G, Mavko B, et al. Effect of axial conduction on the heat transfer in micro-channels[J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 2004, 47(12): 2551-2565.
- [7] Haji-Sheikh A, Minkowycz W J, Sparrow E M. Green's function solution of temperature field for flow in porous passages[J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 2004, 47(22): 4685-4695.
- [8] Lahjomri J, Oubarra A. Analytical solution of the Graetz problem with axial conduction[J]. Journal of Heat Transfer, 1999, 121(4): 1078-1083.
- [9] Michelsen M L, Villadsen J. The Graetz problem with axial heat conduction[J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 1974, 17(11): 1391-1402.
- [10] Haji-Sheikh A, Beck J V, Amos D E. Axial heat conduction effects in the entrance region of parallel plate ducts[J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 2008, 10(25): 5811-5822.
- [11] Haji-Sheikh A, Beck J V, Amos D E. Axial heat conduction effects in the entrance region of circular ducts[J]. Heat Mass Transfer, 2009, 45(3): 331-341.
- [12] Sharma A, Chakraborty S. Semi-analytical solution of the extended Graetz problem for combined electroosmotically and pressure-driven microchannel flows with step-change in wall temperature[J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 2008, 51(19): 4875-4885.
- [13] Haji-Sheikh A. Determination of heat transfer in ducts with axial conduction by variational calculus[J]. Journal of Heat Transfer, 2009, 131(9): 091702. 1-091702. 11.
- [14] Faghri M, Welty J R. Analysis of transfer, including axial fluid conduction for laminar tube flow with arbitrary circumferential wall heat flux variation[J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 1978, 21(3): 317-323.
- [15] Najjar R G, Laohakul C. An approximate solution to the Graetz problem with axial conduction and prescribed wall heat flux[J]. International Communications in Heat Mass Transfer, 1986, 13(3): 315-324.
- [16] Nield D A, Kuznetsov A V, Xiong M. Thermally developing forced convection in a porous medium: parallel plate channel with walls at uniform temperature, with axial conduction and viscous dissipation effects[J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 2003, 46(4): 643-651.
- [17] Kuznetsov A V, Nield D A, Xiong M. Thermally developing forced convection in a porous medium: circular ducts with walls at constant temperature, with longitudinal conduction and viscous dissipation effects[J]. Transport in Porous Media, 2003, 53(3): 331-345.
- [18] Tada S, Ichimiya K. Analysis of laminar dissipative flow and heat transfer in porous saturated circular tube with constant wall heat flux[J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 2007, 50(11): 2406-2413.
- [19] Minkowycz W J, Haji-Sheikh A. Heat transfer in parallel-plate and circular porous passages with axial conduction[J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 2006, 49(13): 2381-2390.
- [20] Yen D H Y, Beck J V. Green's function and three-dimensional steady-state heat-conduction problems in a two-layered composite[J]. Journal of Engineering Mathematics, 2004, 49(3): 305-319.
- [21] Cole K D. Computer programs for temperature in fins and slab bodies with the method of Green's functions[J]. Computer Applications in Education, 2004, 12(3): 189-197.
- [22] Cole K D. Steady-periodic Green's functions and thermal measurement applications in rectangular coordinates[J]. Journal of Heat Transfer, 2006, 128(7): 709-716.
- [23] Cole K D. Steady-periodic heating in parallel-plate micro-channel flow with participating walls[J]. International Journal of Heat Mass Transfer, 2010, 53(5): 870-878.
- [24] Carslaw H S, Jaeger J C. Conduction of heat in solids[M]. London: Clarendon Press, 1959.
- [25] 狄拉克 P A M. 量子力学原理[M]. 陈咸亨, 译. 北京: 科学出版社, 1958.